



TITLE:

# 量子群とゼータ函数のq-analogueについて(等質空間上の非可換解析学)

AUTHOR(S):

上野, 喜三雄; 西澤, 道知

---

CITATION:

上野, 喜三雄 ...[et al]. 量子群とゼータ函数のq-analogueについて(等質空間上の非可換解析学). 数理解析研究所講究録 1995, 895: 15-23

ISSUE DATE:

1995-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84452>

RIGHT:

## 量子群とゼータ函数の $q$ -analogue について

上野 喜三雄 (Kimio Ueno) 早大理工

西澤 道知 (Michitomo Nishizawa) 早大理工

### 1 Introduction

zeta 函数の定義のひとつに、Laplacian 等のスペクトルによる、spectral zeta 函数と呼ばれるものがある。それを量子群上で定義し、性質を調べることは興味ある問題だと思われる。また、この構成の仕方を一般化することにより、種々の zeta 函数の  $q$ -analogue を考えることもできる。この稿では、そのような考え方に従い、Hurwitz zeta 函数の  $q$ -analogue  $\zeta(s, z; q)$  を定義し、それが、Hurwitz zeta 函数の持つ種々の性質の  $q$ -analogue を満たすことを示し、それに関する若干の一般化を行なう。

このような、zeta 函数についての考察が、spectral zeta 函数を通した量子群の幾何学の研究に結び付くことが期待される。

### 2 $q$ -Hurwitz zeta 函数の定義

この稿を通じて、 $0 < q < 1$ ,  $\Re z > 0$ ,  $\delta = 2\pi i / \log q$

$$[z]_q = \frac{1 - q^z}{1 - q} \quad (x : q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - xq^n)$$

とする。

スペクトルの列

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \rightarrow \infty$$

に対し、spectral zeta 函数  $Z(s)$  は

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

と定められる。これを、 $A(SU_q(2))$  を左  $U_q(sl(2))$ -加群と見たときの Casimir 作用素のスペクトル

$$\lambda_n = \left( \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q - q^{-1}} \right)^2 \quad (\text{重複度 } n^2)$$

で定義する (cf. [8])。このときの、spectral zeta 函数  $Z(s : SU_q(2))$  は

$$Z(s : SU_q(2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_n^s} = (1 + q^{-1})^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^{ns}}{[n]_q^{2s}}$$

となる。これとの比較により  $\Re s > 0$  において、Hurwitz の zeta 函数

$$\zeta(s, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^s}$$

の  $q$ -analogue  $\zeta(s, z : q)$  を

$$\zeta(s, z : q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{s(k+1)}}{[k+z]_q^s}$$

で定義する。以後  $\zeta(s, z : q)$  を  $q$ -Hurwitz zeta 函数と呼ぶ。このとき、無限和は、広義一様絶対収束なので、 $\zeta(s, z : q)$  は  $s, z$  に対し正則で、しかも、上の範囲で古典極限  $q \rightarrow 1-0$  は、 $\zeta(s, z)$  に一致する。

次に、これを全  $s$ -平面に解析接続することを考える。 $[k+z]_q^s$  の  $(1-q^{k+z})^s$  の部分を二項展開することにより、 $\zeta(s, z : q)$  は、

$$\begin{aligned} \zeta(s, z : q) &= (1-q)^s \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ q^{(k+1)s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s)_r}{r!} q^{(k+z)r} \right\} \\ &= (q-q^2)^s \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s)_r}{r!} \frac{q^{rz}}{1-q^{r+s}} \end{aligned} \quad (1)$$

と整理しなおすことができる。ただし、 $(s)_r = s(s+1)\cdots(s+r-1)$ 。(1)の形にすることにより、 $\zeta(s, z : q)$  は  $\Re s < 0$  に解析接続できる。さらに  $s=0$  での Laurant 展開を行なうことにより、次の定理を得る。

**Theorem 1**  $q$ -Hurwitz zeta 函数  $\zeta(s, z : q)$  は全  $s$ -平面に解析接続できる。極は  $s = -r + \delta l$  ( $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l \in \mathbb{Z}$ ) で、 $s=0$  における Laurant 展開は

$$\zeta(s, z : q) = \frac{\alpha_{-1}}{s} + \alpha_0 + s \{ \alpha_1 - \log(q^z : q)_{\infty} \} + O(s^2), \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= -\frac{1}{\log q}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} - \frac{\log(q-q^2)}{\log q} \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{12} \log q + \frac{1}{2} \log(q-q^2) - \frac{1}{2} \frac{\log^2(q-q^2)}{\log q} \end{aligned}$$

ただし  $\log^k x = (\log x)^k$  とおいた。

### 3 Euler-MacLaurin 展開

次に、通常の zeta 函数について行なわれているように、Euler-MacLaurin の和公式を用いて、 $\zeta(s, z : q)$  を解析する。

**Theorem 2** (Euler-MacLaurin の和公式)

$$\begin{aligned} \sum_{r=M}^{N-1} f(r) &= \int_M^N f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k!} \{ f^{(k-1)}(N) - f^{(k-1)}(M) \} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_M^N \frac{\overline{B}_n(t)}{n!} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $B_k(t)$  は

$$\frac{ze^{tz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n$$

で定義される Bernoulli 多項式で  $B_k = B_k(0)$ 、 $\overline{B}_n(t) = B_n(t - [t])$  である ( $[t]$  は Gauss 記号)。

ここで

$$f(t) = \frac{q^{(t+1)s}}{(1-q^{t+z})^s}$$

とおいて、 $M=0, N=\infty$  として (3) を用いる。超幾何関数の積分公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma : x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du \quad (4)$$

を用いると、第一項が超幾何関数で表され、

$$\begin{aligned} \zeta(s, z : q) &= (1-q)^s \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \\ &= -\frac{(q-q^2)^s}{s \log q} F(s, s, s+1 : q^z) + \frac{1}{2} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \\ &\quad + s \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left( \frac{\log q}{q^z-1} \right)^{2k-1} P_{2k-1}(q^z; s) \\ &\quad - R_{2m}(s, z : q) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし  $P_k(x; s)$  は  $x$  の多項式で

$$P_0(x; s) = \frac{1}{s}, \quad P_1(x; s) = 1,$$

$$(x-x^2)P'_k(x; s) + (kx+s)P_k(x; s) = P_{k+1}(x; s).$$

で定義されるもので、

$$R_{2m}(s, z : q) = s \int_0^{\infty} \frac{\overline{B}_{2m}(t)}{(2m)!} \left( \frac{\log q}{q^{t+z}-1} \right)^{2m} \left( \frac{1-q}{1-q^{t+z}} \right)^s q^{s(t+1)} P_{2m}(q^{t+z}; s) dt$$

となる。さらに (5) において、 $m=1$  としたときの式

$$\begin{aligned} \zeta(s, z : q) &= -\frac{(q-q^2)^s}{s \log q} F(s, s, s+1 : q^z) + \frac{1}{2} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \\ &\quad + \frac{s}{12} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \left( \frac{\log q}{q^z-1} \right) - R_2(s, z : q), \end{aligned}$$

の  $R_2(s, z : q)$  に  $\overline{B}_2(t)$  の Fourier 展開

$$\overline{B}_2(t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^2}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} R_2(s, z : q) &= (1-q)^s \int_0^{\infty} \frac{\overline{B}_2(t)}{2} f''(t) dt \\ &= \frac{(1-q)^s}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} [f'(t) \cos(2\pi nt)]_0^{\infty} + \frac{2\pi}{n} \int_0^{\infty} f'(t) \sin(2\pi nt) dt \right\} \\ &= \frac{s}{12} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \left( \frac{\log q}{q^z-1} \right) + \frac{(q-q^2)^s \log q}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \int_0^{\infty} e^{2\pi i l t} \frac{q^{st}}{(1-q^{t+z})^{s+1}} dt \\ &= \frac{s}{12} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \left( \frac{\log q}{q^z-1} \right) + \frac{s(q-q^2)^s}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l(s+\delta l)} F(s+1, s+\delta l, s+\delta l+1 : q^z) \end{aligned}$$

となり、超幾何関数を成分とする無限級数で表せる。これは  $s \neq -r + \delta k$  ( $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ) で広義一様絶対収束なので、この表示は全  $s$ -平面に解析接続できる。

**Theorem 3**  $s \neq -r + \delta k$  ( $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ) で

$$\begin{aligned} \zeta(s, z : q) &= -\frac{(q - q^2)^s}{s \log q} F(s, s, s + 1 : q^z) + \frac{1}{2} \left( \frac{q - q^2}{1 - q^z} \right)^s \\ &+ \frac{s(q - q^2)^s}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l(s + \delta l)} F(s + 1, s + \delta l, s + 1 + \delta l : q^z). \end{aligned} \quad (6)$$

#### 4 古典極限

(6) を用いて  $\zeta(s, z : q)$  の古典極限を考える。  $q \rightarrow 1 - 0$  での挙動は、超幾何函数の接続公式

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma : x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1 : 1 - x) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1 : 1 - x) \end{aligned}$$

を用いて調べることができる。これを Theorem 3 に代入し、整理すると

$$\begin{aligned} \zeta(s, z : q) &+ \frac{(q - q^2)^s q^{-zs}}{\log q} \frac{\pi}{\sin \pi s} \\ &= \frac{1}{1 - s} \left( \frac{q - q^2}{1 - q^z} \right)^s \left( \frac{q^z - 1}{\log q} \right) F(1, 1, 2 - s : 1 - q^z) + \frac{1}{2} \left( \frac{q - q^2}{1 - q^z} \right)^s \\ &+ \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \left[ \left( \frac{q - q^2}{1 - q^z} \right)^s \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\delta l)_r}{(1 - s)_r} (1 - q^z)^r \right\} \right. \\ &\left. - \frac{\Gamma(1 - s)\Gamma(s + \delta l)}{\Gamma(\delta l)} (q - q^2)^s q^{-zs} e^{-2\pi i l} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

このとき、

$$\frac{q^z - 1}{\log q} \rightarrow z \quad \lim_{q \rightarrow 1-0} (1 - q)^s \frac{\Gamma(s + \delta l)}{\Gamma(\delta l)} = (-2\pi i l)^s \quad (8)$$

に注意して、極限を求めると

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1-0} \left\{ \zeta(s, z : q) + \frac{(q - q^2)^s q^{-zs}}{\log q} \frac{\pi}{\sin \pi s} \right\} \\ = \frac{z^{1-s}}{s - 1} + \frac{z^{-s}}{2} + \frac{s z^{-s}}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} U(1, 1 - s : -2\pi i l z). \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $U(\alpha, \gamma : x)$  は合流型超幾何函数

$$F(\alpha, \gamma : z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n! (\gamma)_n} z^n$$

を用いて

$$U(\alpha, \gamma : x) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 + \alpha - \gamma)} F(\alpha, \gamma : x) + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)} e^x x^{1-\gamma} F(1 - \alpha, 2 - \gamma : -x)$$

と定義される函数である (cf. [13])。一方でこの函数は積分表示

$$U(\alpha, \gamma : x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-xu} (1 + u)^{\gamma - \alpha - 1} du$$

をもち、これを用いれば、 $\zeta(s, z)$  の  $m = 1$  までの Euler-MacLaurin 展開

$$\zeta(s, z) = \frac{z^{1-s}}{s-1} + \frac{z^{-s}}{2} + \frac{s}{12} z^{-s-1} - \frac{s(s+1)}{2!} \int_0^\infty \frac{\overline{B}_2(t)}{(z+t)^{s+2}} dt$$

は、前と同様な方法で

$$\zeta(s, z) = \frac{z^{1-s}}{s-1} + \frac{z^{-s}}{2} + \frac{sz^{-s}}{2\pi i} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} U(1, 1-s : -2\pi i l z)$$

となり、(9) の右辺と一致する。以上より

Theorem 4  $s$  が正整数でないとき、

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} \left\{ \zeta(s, z : q) + \frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q} \frac{\pi}{\sin \pi s} \right\} = \zeta(s, z).$$

## 5 函数等式との関連

以後

$$\zeta^*(s, z : q) = \zeta(s, z : q) + \frac{(q-q^2)^s q^{-zs}}{\log q} \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

とする。 $\Re s < 0$ ,  $0 < z \leq 1$  のとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} F(\delta l, 1, 1-s : 1-q^z) \\ &= -\frac{1}{s-1} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \frac{q^z-1}{\log q} F(1, 1, 2-s : 1-q^z) - \frac{1}{2} \left( \frac{q-q^2}{1-q^z} \right)^s \end{aligned}$$

が成立する。これと前節の定理を用いると

Theorem 5  $0 < z \leq 1$ ,  $\Re s < 0$ ,  $s \neq -r + \delta l$  ( $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $l \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ) とすると

$$\zeta^*(s, z : q) = -\frac{1}{2\pi i} (q-q^2)^s q^{-zs} \Gamma(1-s) \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \frac{\Gamma(s+\delta l)}{\Gamma(\delta l)} e^{-2\pi i l z} \quad (10)$$

がいえる。

Theorem 4 と、(8) より、(10) の古典極限は

$$\zeta(s, z) = \Gamma(1-s) \left\{ (2\pi i)^{s-1} \mathcal{L}_{1-s}(z) + (-2\pi i)^{s-1} \mathcal{L}_{1-s}(1-z) \right\} \quad (11)$$

となる。ただし、 $\mathcal{L}_s(z)$  は、generalized polylogarithm

$$\mathcal{L}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z}}{n^s} \quad (\Re s > 0)$$

である。つまり、Theorem 5 は、Hurwitz の表示の  $q$ -analogue であると考えられる (11)。は  $z = 1$  とおいたときに Riemann の zeta 函数の函数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

を与える (cf. [4], [9])。

## 6 $q$ -Hurwitz zeta 函数と $q$ -gamma 函数

Hurwitz zeta 函数と gamma 函数の間には

$$\left[ \frac{d}{ds} \zeta(s, z) \right]_{s=0} = \log \left( \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (12)$$

の関係がある。同様の関係が  $q$ -Hurwitz zeta 函数と  $q$ -gamma 函数

$$\Gamma(z+1:q) = (1-q)^{-z} \frac{(q;q)}{(q^z;q)}$$

の間にも成立する。Theorem 1 と Theorem 4 の Corollary として、次が成立する。

Corollary 1

$$\left[ \frac{d}{ds} \zeta^*(s, z:q) \right]_{s=0} = \log \left( \frac{q^{\frac{z^2}{2}-z+\frac{5}{12}} e^{\frac{\pi^2}{6 \log q}} \Gamma(z:q)}{(1-q)^{\frac{1}{2}} (q;q)_\infty} \right)$$

この式の古典極限は (12) となる。

古典論では、Hurwitz zeta 函数の  $s = 0$  での Laurant 展開と Euler-MacLaurin 展開の  $s$  の 1 次の項を比較することにより、Stirling の公式が得られる。ここでも同様なことが考えられるが、古典極限をとるときの挙動が見にくいので、まず、 $q$ -shifted factorial  $(q^z;q)_\infty$  の漸近的な挙動から考える。 $\zeta(s, z:q)$  の 2 通りの表示 (1), (5) の  $s = 0$  での Laurant 展開の  $s$  の 1 次の係数を比較することにより、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \log(q^z;q)_\infty &= \frac{1}{\log q} Li_2(q^z) - \frac{1}{12} \log q + \frac{1}{2} \log(1-q^z) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left( \frac{\log q}{q^z-1} \right)^{2k-1} P_{2k-1}(q^z) + R_{2m}(z:q) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、

$$R_{2m}(z:q) = \frac{1}{s} R_{2m}(s, z:q) \Big|_{s=0} = \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{2m}(t)}{(2m)!} \left( \frac{\log q}{q^{t+z}-1} \right)^{2m} P_{2m}(q^{t+z}) dz.$$

で、 $P_k(x) = P_k(x, 0)$ ,  $Li_2(x)$  は、Euler の dilogarithm

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

である ( $q$ -shifted factorial の  $q \rightarrow 1$  での漸近的挙動の主要項に dilogarithm が現れることは [5] にも示されている)。

これより、次の定理が成り立つ。

Theorem 6

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z:q) &\sim \left( z - \frac{1}{2} \right) \log \left( \frac{1-q^z}{1-q} \right) + \log q \int_1^z \xi \frac{q^\xi}{1-q^\xi} d\xi \\ &\quad + C_1(q) + \frac{1}{12} \log q + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left( \frac{\log q}{q^z-1} \right)^{2k-1} P_{2k-1}(q^z) \quad (\Re z \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ただし、

$$C_1(q) = -\frac{1}{12} \log q - \frac{1}{12} \frac{\log q}{q-1} + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_2(t)}{2} \left( \frac{\log q}{q^{t+1}-1} \right)^2 q^{t+1} dt.$$

この漸近展開は  $0 < q \leq 1$  で一様に成立する。特に  $q = 1$  のとき、これは *Stirling* の公式と一致する。

これは、 $\frac{d}{dz} \log \Gamma(z; q)$  に Euler-MacLaurin の和公式を用いて、*Stirling* の公式の  $q$ -analogue を求めた Moak [10] の結果と一致している。

また、 $q$ -shifted factorial の漸近的挙動の式 (13) と polylogarithm の展開式 (cf. Lewin [7])

$$\frac{1}{b \log q} Li_2(q^a) = \frac{\pi^2}{6b \log q} - \frac{a}{b} \log a - \frac{a}{b} \log(-\log q) + \frac{a}{b} + O(\log q)$$

を用いることにより、

$$\begin{aligned} \log(q^a : q^b)_\infty &= \frac{\pi^2}{6b \log q} + \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{b} \right) \{ \log(-\log q) + \log b \} + \frac{1}{2} \log(2\pi) \\ &\quad - \log \Gamma\left(\frac{a}{b}\right) + O(\log q). \end{aligned}$$

がいえる。これより Ramanujan's Notebook の式 (cf. Berndt [3], p.285)

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{(q^2 : q^5)_\infty (q^3 : q^5)_\infty} &= -\frac{\pi^2}{15 \log q} - \frac{1}{2} \log \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right) + O(\log q) \\ \log \frac{1}{(q : q^5)_\infty (q^4 : q^5)_\infty} &= -\frac{\pi^2}{15 \log q} - \frac{1}{2} \log \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) + O(\log q) \end{aligned}$$

が導ける。

## 7 多重化

最後に、今までの考察の一般化について、概略を述べる。Hurwitz zeta 函数の一般化として、多重 zeta 函数

$$\zeta_r(s, z) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r=0}^{\infty} \frac{1}{(k_1 + k_2 + \dots + k_r + z)^s}$$

が知られている。この  $q$ -analogue として、 $q$ -多重 zeta 函数

$$\begin{aligned} \zeta_r(s, z; q) &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r=0}^{\infty} \frac{q^{s(k_1+k_2+\dots+k_r+1)}}{[k_1 + \dots + k_r + z]_q^s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{k+r-1}{r-1} q^{s(k+1)}}{[k+z]_q^s} \end{aligned}$$

が定義できる。このとき、Euler-MacLaurin 展開には、一般化された超幾何函数が生ずる。さらに

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial s} \zeta_r(s, z) \right]_{s=0} \right\}^{(-1)^{r-1}}$$

を正規化することで、多重 gamma 函数  $G_r(z)$  が定義できる。多重 gamma 函数は Bohr-Morrelup の定理の一般化



1.  $G_r(z+1) = G_{r-1}(z)G_r(z)$ ,
2.  $G_r(1) = 1$ ,
3.  $\frac{d^{r+1}}{dz^{r+1}} \log G_r(z+1) \geq 0$  for  $z \geq 0$ ,
4.  $G_0(z) = z$

を満たす。これに対し、

1.  $G_r(z+1:q) = G_{r-1}(z:q)G_r(z:q)$ ,
2.  $G_r(1:q) = 1$ ,
3.  $\frac{d^{r+1}}{dz^{r+1}} \log G_r(z+1:q) \geq 0$  for  $z \geq 0$ ,
4.  $G_0(z;q) = [z]_q$

を満たす  $q$ -多重 gamma 関数を

$$G_0(z+1:q) = [z+1]_q, \quad G_1(z+1:q) = \Gamma(z+1;q),$$

$$G_r(z+1:q) = (1-q)^{-\binom{z}{r}} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1-q^{z+n}}{1-q^n} \right)^{(-1)^r \binom{n+r-2}{r-1}} (1-q^n)^{g_r(z,n)} \right],$$

ただし

$$g_r(z,n) = \sum_{m=1}^{r-1} (-1)^{m-1} \binom{z}{r-m} \binom{n+m-2}{m-1}.$$

で定義することができる (cf.[11])。これと  $q$ -多重 zeta 関数は古典論と同様に関係づけられる。 $q$ -多重 gamma 関数の漸近的挙動には polylogarithm が現れる。

## 参考文献

- [1] E.W.Barnes, *The theory of G-function*, Quat. J. Math 31 (1899) p.264–314
- [2] E.W.Barnes, *On the theory of the multiple gamma function*, Trans. Cambridge. Phil. Soc 19 (1904) p.374–425
- [3] B.C.Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part IV*, Springer-Verlag
- [4] J.Dufresnoy and C.Pisot, *Sur la relation fonctionnelle  $f(x+1) - f(x) = \phi(x)$* , Bull. Soc. Math. Belgique 15 (1963) p.259–270
- [5] L.D.Fadeev and R.M.Kashaev, *Quantum Dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. A 9 (1994) p.427–434
- [6] N.Kurokawa, Lectures delivered at Tokyo Institute of Technology, 1993.
- [7] L.Lewin *Polylogarithms and Associated Functions*, North Holland
- [8] T.Masuda, K.Mimachi, Y.Nakagami, M.Noumi and K.Ueno, *Representation of the Quantum group  $SU_q(2)$  and the Little  $q$ -Jacobi Polynomials*, J. Funct. Anal. 99 (1991), p.357–386

- [9] J.Milnor, *On Polylogarithms, Hurwitz Zeta-Functions and the Kubert Identities*, L'Enseignement Math.t.29 (1983), p.281–322
- [10] D.S.Moak, *The  $q$ -analogue of Stirling Formula*, Rocky Mountain J. Math,14 (1984),p.403–413
- [11] M.Nishizawa, *On A  $q$ -analogue of Barne's  $G$ -function*, preprint
- [12] P.Podleś, *Quantum Spheres*, Lett. Math. Phys. 14 (1987),p.193–202
- [13] L.J.Slator. *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge. Univ. Press
- [14] K.Ueno, M.Nishizawa. *Quantum groups and zeta-functions* Proc.of the Karpacz Winter School 1994, hep-th/9408143